Cv.5 Modelovanie elektrických obvodov
v stavovom priestore

# Stavový model elektrického obvodu

**Úloha:**

Zostaviť stavový model obvodu. V MATLABe zistiť prenos, PrCH a LFCH.



Parametre obvodu: *R =* 15 Ω, *Rz =* 2.106 Ω, *L =* 10.10-3 H, *C =* 90·10-6  F, *U1 =* 1 V

**Riešenie:**

1. Volíme stavové veličiny elektrického obvodu:
* prúd indukčnosťou $i\_{L}$ lebo $u\_{L}=L\frac{di\_{L}}{dt}$
* napätie na kondenzátore $u\_{C}$ lebo $i\_{C}=C\frac{du\_{C}}{dt}$

 Počet stavových veličín (zásobníkov energie) = 3



1. Z obvodu zostavíme rovnice pre slučky:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| S1: | $$u\_{C1}+R\_{1}\left(C\_{1}\frac{du\_{C1}}{dt}-C\_{2}\frac{du\_{C2}}{dt}\right)=U\_{1}$$ |  |
| S2: | $$-R\_{1}\left(C\_{1}\frac{du\_{C1}}{dt}-C\_{2}\frac{du\_{C2}}{dt}\right)+u\_{C2}+R\_{z}\left(C\_{2}\frac{du\_{C2}}{dt}+i\_{L}\right)=0$$ |  |
| S3 | $$L\frac{di\_{L}}{dt}+R\_{2}i\_{L}-u\_{C1}-u\_{C2}=0$$ |  |

1. Rovnice upravíme nasledovne:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| S1: | $$u\_{1}+R\_{1}\left(C\_{1}\frac{du\_{C1}}{dt}-C\_{2}\frac{du\_{C2}}{dt}\right)=u\_{1}$$ |  |
| S2: | $$-R\_{1}\left(C\_{1}\frac{du\_{C1}}{dt}-C\_{2}\frac{du\_{C2}}{dt}\right)+u\_{C2}+R\_{z}\left(C\_{2}\frac{du\_{C2}}{dt}+i\_{3}\right)=0$$ |  |
| S3 | $$L\frac{di\_{3}}{dt}+R\_{2}i\_{3}-u\_{C1}-u\_{C2}=0$$ |  |
| $$u\_{Rz}$$ | $$u\_{1}=u\_{C1}+ u\_{C2}+ u\_{Rz}$$ |  |

1. Prehľadnejší spôsob zostavenia stavových rovníc dostaneme, ak zavedieme stavové veličiny a ich derivácie priamo. V predchádzajúcej schéme premenujeme stavové veličiny a ich derivácie:
 $u\_{C1}=x\_{1} , u\_{C2}=x\_{2}, i\_{L}=x\_{3}$
$$\frac{du\_{C1}}{dt}=\frac{dx\_{1}}{dt}, \frac{du\_{C2}}{dt}=\frac{dx\_{2}}{dt}, \frac{di\_{L}}{dt}=\frac{dx\_{3}}{dt}$$



1. Rovnice slučkových prúdov formálne zapíšeme nasledovne:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| S1: | $$x\_{1}+R\_{1}C\_{1}\frac{dx\_{1}}{dt}- R\_{1}C\_{2}\frac{dx\_{2}}{dt}=U\_{1}$$ |  |
| S2: | $$--R\_{1}C\_{1}\frac{dx\_{1}}{dt}+\left(R\_{1}+R\_{z}\right)C\_{2}\frac{dx\_{2}}{dt}+x\_{2}+R\_{Z}x\_{3}=0$$ |  |
| S3 | $$L\frac{dx\_{3}}{dt}+R\_{2}x\_{3}-x\_{1}-x\_{2}=0$$ |  |
| --- | $$u\_{1}=x\_{1}+ x\_{2}+ u\_{Rz}$$ |  |

V prvej a druhej rovnici sa nachádzajú dve derivácie stavových veličín.
Pre zostavenie stavového popisu sa v každej rovnici má nachádzať derivácia iba jednej stavovej veličiny, takže to musíme vyriešiť nasledovne: ide o sústavu lineárnych algebraických rovníc, pre ktorú máme nasledovné riešenie:

1. dosadzovaním (z jednej rovnice do druhej)
2. pomocou inverznej matice
3. Cramerovým pravidlom alebo
4. Symbolickým počtom (v symbolickom MATLABe)

V ďalšom pre riešenie sústavy lineárnych rovníc použijeme poslednú metódu.

# Riešenie rovníc a sústav rovníc v symbolickom v MATLABe

**Riešenie algebraických rovníc**

Symbolic Math toolbox v MATLABe umožňuje riešiť mnoho druhov rovníc, vrátane nelineárnych rovníc a riešenia sústavy rovníc. Používame pritom inštrukciu **solve**. **Postup:**

1. Definujeme premenné v rovnice ako symbolické pomocou inštrukcie **syms.**
2. Zapíšeme rovnice. Rovnica sa zadáva do jednoduchých úvodzoviek – napr. **'a\*x^2+b\*x+c = 0'**
3. Riešime rovnice pomocou inštrukcie **solve**.
4. Urobíme skúšku správnosti dosadením do pôvodnej rovnice/rovníc.

Existujú dva spôsoby, ako možno symbolicky zapísať riešenie rovnice.

**Príklad 1:**

Riešenia kvadratickej rovnice v tvare $ax^{2}+bx+c=0$ nájdeme nasledovne:

Ak pravá strana rovnice:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) **je špecifikovaná**:syms x a b c; f = ax^2+b\*x+c == 0 [x]=solve(f,x)Výsledok:>> x =>> -1/2\*(b-(b^2-4\*a\*c)^(1/2))/a -1/2\*(b+(b^2-4\*a\*c)^(1/2))/a Dostali sme dve riešenia. Ak chceme použiť iba prvé, potom ho vyberieme nasledovne, napr.: **x1 = x(1)**  | 2) **nie je špecifikovaná.** implicitne sa predpokladá, že je rovná nule:syms x a b c f = a\*x^2 + b\*x + c [x]=solve(f,x)Dostávame ten istý výsledok, ako v predchádzajúcom prípade. |

Podobne vyriešime kvadratickú rovnicu s dvoma premennými vzhľadom na $x$ a $y$:

$$\left(x-a\right)^{2}+\left(y-b\right)^{2}=r^{2}$$

syms a b r x y

solve('(x-a)^2+(y-b)^2=r^2','x')

>> ans =

 a+(b+r-y)^(1/2)\*(r-b+y)^(1/2)

 a-(b+r-y)^(1/2)\*(r-b+y)^(1/2)

**Príklad 2:**

Riešenie rovnice $e^{2x}=3y$ vzhľadom na $x$ nájdeme nasledovne:

syms x y;

eq = exp(2\*x) == 3\*y

 [x] = solve(eq, x)

kde názov premennej eq znamená skratku od equation (rovnica).

**Príklad 3:** Nájdite riešenie nasledovnej sústavy troch lineárnych rovníc o troch neznámych:

$$2x-3y+4z=5$$

$$y+4z+x=10$$

$$-2z+3x+4y=0$$

>> syms x y z;

>> eq1 = 2\*x-3\*y+4\*z == 5

>> eq2 = y+4\*z+x == 10

>> eq3 = -2\*z+3\*x+4\*y == 0

>> [x,y,z] = solve(eq1,eq2,eq3,x,y,z)

**Poznámka:** pri zadávaní premenných nie je potrebné ich zadávať v abecednom poradí. Na druhej strane, **premenné vo výsledku sa nachádzajú v abecednom porad**í bez ohľadu na to, v akom poradí boli deklarované, resp. zadávané do rovníc, takže je potrebné dávať pozor na poradie premenných.

# Pokračovanie riešenia príkladu (stavového modelu)

1. Pre riešenie v MATLABE zapíšeme rovnice formálne (**dx1≈ dx1/dt**, atď.)

x1 + R1\*C1\*dx1 - R1\*C2\*dx2 = U1

-R1\*C1\*dx1 + (R1+Rz)\*C2\*dx2 + x2 + Rz\*x3 = 0

L\*dx3 + R2\*dx3 - x1 - x2 = 0

Rovnice zapíšeme a riešime v symbolickom MATLABe

syms x1 x2 x3 dx1 dx2 dx3

syms R1 R2 Rz C1 C2 L U1

eq1 = x1+R1\*C1\*dx1-R1\*C2\*dx2==U1 % zadanie rovníc

eq2 = -R1\*C1\*dx1+(R1+Rz)\*C2\*dx2+x2+Rz\*x3

eq3 = L\*dx3+Rz\*x3-x1-x2

[dx1,dx2,dx3] = solve(eq1,eq2,eq3,dx1,dx2,dx3)

1. Výpis riešenia rovníc:

dx1 = -(R1\*x1 - Rz\*U1 - R1\*U1 + R1\*x2 + Rz\*x1 + R1\*Rz\*x3)/(C1\*R1\*Rz)

dx2 = -(x1 - U1 + x2 + Rz\*x3)/(C2\*Rz)

dx3 = (x1 + x2 - Rz\*x3)/L

 pretty(dx1), pretty(dx2), pretty(dx3) % úprava výpisu

Výpis po pretty (upravené)

 R1 x1 - Rz U1 - R1 U1 + R1 x2 + Rz x1 + R1 Rz x3

dx1 = - --------------------------------------------------

 C1 R1 Rz

 x1 - U1 + x2 + Rz x3

dx2= - ---------------------

 C2 Rz

 x1 + x2 - Rz x3

dx3 = -----------------

 L

1. Prepis do maticového zápisu stavového modelu – zostavíme štruktúru zápisu rovnice dynamiky pre 3 stavové veličiny:

 forma: $\left[\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}&&\\&&\\&&\end{matrix}\right].\left[\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right].u$

$$\left[\begin{matrix}\dot{x}\_{1}\\\dot{x}\_{2}\\\dot{x}\_{3}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}-\frac{R\_{1}+R\_{z}}{C\_{1}R\_{1}R\_{z}}&-\frac{R\_{1}}{C\_{1}R\_{1}R\_{z}}&-\frac{R\_{1}R\_{z}}{C\_{1}R\_{1}R\_{z}}\\-\frac{1}{C\_{2}R\_{z}}&-\frac{1}{C\_{2}R\_{z}}&\frac{-R\_{z}}{C\_{2}R\_{z}}\\\frac{1}{L}&\frac{1}{L}&-\frac{R\_{z}}{L}\end{matrix}\right].\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}\frac{R\_{z}+R\_{1}}{C\_{1}R\_{1}R\_{z}}\\\frac{1}{C\_{2}R\_{z}}\\0\end{matrix}\right].u$$

Pozn. niektoré členy sa krátia, ale symbolický MATLAB to urobí automaticky.

Výstupná rovnica v maticovom zápise je:

 $u\_{Rz}=\left[\begin{matrix}-1&-1&0\end{matrix}\right].\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right]+\left[1\right].u\_{1}$

1. Stavové rovnice zapíšeme do MATLABu a dosadíme parametre:

 R1x=15; R2x=2e6; Rzx=15; C1x=90e-6; C2x=90e-6; Lx=10e-3; U1x=1

 A=[-(R1+R2)/(C1\*R1\*Rz) -R1/(C1\*R1\*Rz) -R1\*Rz/(C1\*R1\*Rz)

 -1/(C2\*Rz) 1/(C2\*Rz) -Rz/(C2\*Rz)

 1/L 1/L -Rz/L]

 b=[(Rz+R1)/(C1\*R1\*Rz); 1/(C2\*Rz); 0]

 cT=[-1 -1 0]

 d=[1]

 A = x1 x2 x3

 x1 -9.87662e+07 -740.74074 -11111.11111

 x2 -740.74074 -740.74074 -11111.11111

 x3 100.00000 100.00000 -1500.00000

 b = u1

 x1 1481.48148

 x2 740.74074

 x3 0

 cT = x1 x2 x3

 y1 -1.00000 -1.00000 0

 d = u1

 y1 1.000000

1. Zobrazíme prechodovú a frekvenčnú charakteristiku



1. Výpis programu

% Riešenie sústavy 3 lineárnych alg.rovníc v symbolickom MATLABe, V.Fedák,11.11.2020

% pre daný elektrický obvod

%

% x1 + R1.C1.dx1 - R1.C2.dx2 = U1

% -R1.C1.dx1 + (R1+Rz).C2.dx2 + x2 + Rz.x3 = 0

% L.dx3 + Rz.x3 - x1 - x2 = 0

%

% Neznámymi sú premenné dx1, dx2, dx3 predstavujúce derivácie stavových veličín

% dx1=dx1/dt, dx2=dx2/dt, dx3=dx3/dt

%%

clc, clear, format compact

R1x=15; R2x=2e6; Rzx=15; C1x=90e-6; C2x=90e-6; Lx=10e-3; U1x=1 % parametre obvodu

syms x1 x2 x3 dx1 dx2 dx3

syms R1 R2 Rz C1 C2 L U1

eq1 = x1+R1\*C1\*dx1-R1\*C2\*dx2==U1 % zadanie rovníc

eq2 = -R1\*C1\*dx1+(R1+Rz)\*C2\*dx2+x2+Rz\*x3

eq3 = L\*dx3+Rz\*x3-x1-x2

[dx1,dx2,dx3] = solve(eq1,eq2,eq3,dx1,dx2,dx3)

pretty(dx1), pretty(dx2), pretty(dx3) % úprava výpisu zlomkov

%% Stavový model (prepísaný z výsledkov riešenia alg. rovníc a doplnený výstupnou rovnicou

A=[-(R1+R2)/(C1\*R1\*Rz) -R1/(C1\*R1\*Rz) -R1\*Rz/(C1\*R1\*Rz)

 -1/(C2\*Rz) 1/(C2\*Rz) -Rz/(C2\*Rz)

 1/L 1/L -Rz/L]

b=[(Rz+R1)/(C1\*R1\*Rz); 1/(C2\*Rz); 0]

cT=[-1 -1 0]

d=[1]

%% Stavový model po dosadení číslených hodnôt

% Náhrada symb.premenných hodnotami

R1=R1x; R2=R2x; Rz=Rzx; C1=C1x; C2=C2x; L=Lx; U1=U1x;

A=[-(R1+R2)/(C1\*R1\*Rz) -R1/(C1\*R1\*Rz) -R1\*Rz/(C1\*R1\*Rz)

 -1/(C2\*Rz) -1/(C2\*Rz) -Rz/(C2\*Rz)

 1/L 1/L -Rz/L];

b=[(Rz+R1)/(C1\*R1\*Rz); 1/(C2\*Rz); 0];

cT=[-1 -1 0];

d=[1];

%%

printsys(A,b,cT,d)

disp('Vlastné hodnoty matice A:')

eig(A)

subplot(1,2,1),step(A,b,cT,d),grid on

subplot(1,2,2),bode(A,b,cT,d),grid on

**Príklad na precvičenie:**

|  |  |
| --- | --- |
| C:\Users\Viliam Fedák\AppData\Local\Temp\SNAGHTML576ad18.PNG |  |