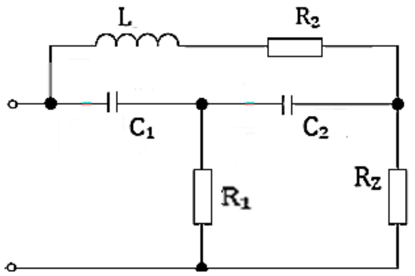
Cv. 6 Modelovanie elektrických obvodov v stavovom priestore

1 Stavový model elektrického obvodu

Úloha:

Odvodiť stavový model elektrického obvodu. V MATLABe zistiť tiež prenos, PrCh a LFCh.



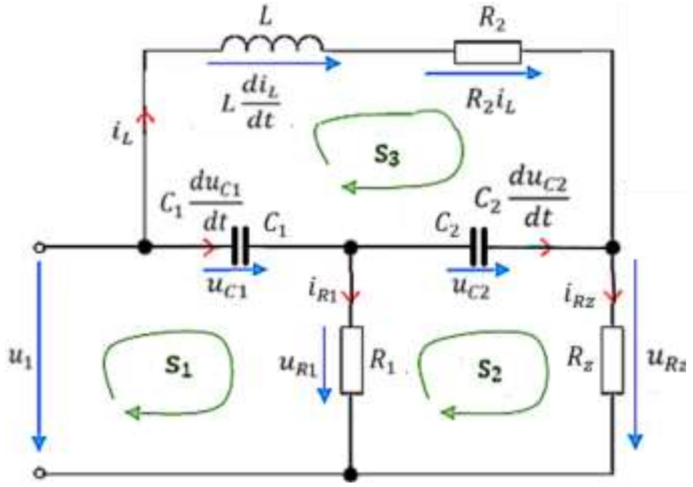
Parametre: $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$, $R_z = 10$ kΩ, $L = 10$ mH, $C_1 = 10\ \mu$F, $C_2 = 100\ \mu$F, $U_1 = 1$ V

Riešenie:

1) **Volíme stavové veličiny** elektrického obvodu:

- prúd indukčnosťou i_L lebo existuje derivácia $u_L = L\frac{di_L}{dt}$
- napätie na kondenzátore u_C lebo existuje derivácia $i_C = C\frac{du_C}{dt}$

Počet stavových veličín obvodu (zásobníkov energie) = 3



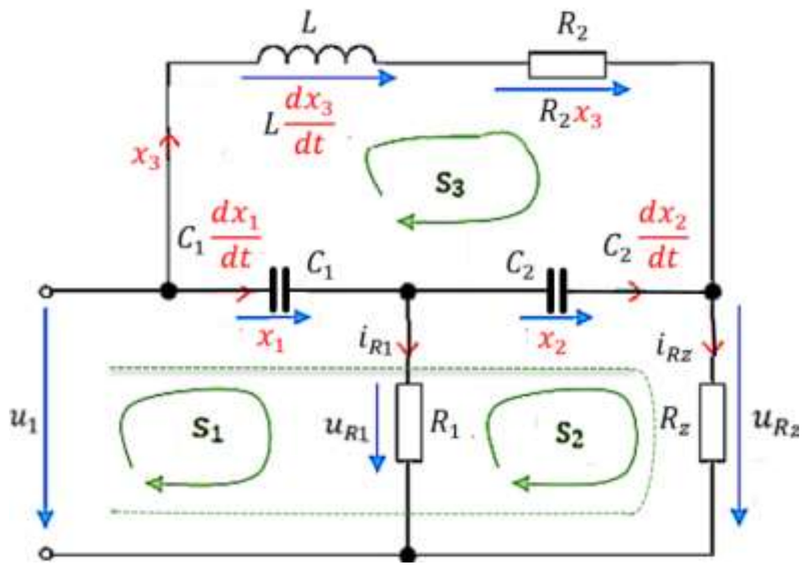
2) V schéme zostavíme slučky a v nich napäťové rovnice: $\Sigma u_i = 0$

S1:
$$u_{C1} + R_1\left(C_1\frac{du_{C1}}{dt} - C_2\frac{du_{C2}}{dt}\right) = u_1$$

S2:
$$-R_1\left(C_1\frac{du_{C1}}{dt} - C_2\frac{du_{C2}}{dt}\right) + u_{C2} + R_z\left(C_2\frac{du_{C2}}{dt} + i_L\right) = 0$$

S3:
$$L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L - u_{C1} - u_{C2} = 0$$

3) **Prehľadnejší spôsob zostavenia stavových rovníc** dostaneme, ak v schéme priamo zapíšeme stavové veličiny a ich derivácie.
   Premenujeme stavové veličiny: $u_{C1} = x_1$, $u_{C2} = x_2$, $i_L = x_3$



4) **Rovnice zapíšeme** nasledovne:

S1: $$x_1 + R_1\left(C_1\frac{dx_1}{dt} - C_2\frac{dx_2}{dt}\right) = u_1$$

S2: $$-R_1\left(C_1\frac{dx_1}{dt} - C_2\frac{dx_2}{dt}\right) + x_2 + R_z\left(C_2\frac{dx_2}{dt} + x_3\right) = 0$$

S3 $$L\frac{dx_3}{dt} + R_2x_3 - x_1 - x_2 = 0$$

--- $$u_1 = x_1 + x_2 + u_{Rz}$$

5) **Zlúčime výrazy** pri rovnakých deriváciách:

S1: $$x_1 + R_1C_1\frac{dx_1}{dt} - R_1C_2\frac{dx_2}{dt} = U_1$$

S2: $$-R_1C_1\frac{dx_1}{dt} + (R_1 + R_z)C_2\frac{dx_2}{dt} + x_2 + R_Zx_3 = 0$$

S3 $$L\frac{dx_3}{dt} + R_2x_3 - x_1 - x_2 = 0$$

--- $$u_1 = x_1 + x_2 + u_{Rz}$$

Pre zostavenie stavového modelu sa v každej rovnici má nachádzať derivácia iba jednej stavovej veličin. Tu, v prvej a druhej rovnici, sa nachádzajú dve derivácie stavových veličín. V podstate ide o sústavu lineárnych algebraických rovníc, ktorú vieme riešiť:

1. dosadzovaním (z jednej rovnice do druhej)
2. pomocou inverznej matice
3. Cramerovým pravidlom alebo
4. Symbolickým počtom (v symbolickom MATLABe)

2 Riešenie rovníc a sústav rovníc v symbolickom v MATLABe

Získanú sústavu algebraických rovníc vyriešime programovaním v symbolickom počte v MATLABe.

Riešenie algebraických rovníc a lineárnej sústavy alebraických rovníc

Symbolic Math toolbox v MATLABe umožňuje riešiť mnoho druhov rovníc, vrátane nelineárnych rovníc a riešenia sústavy rovníc. Používame pritom inštrukciu **solve.** **Postup:**

1) Definujeme premenné v rovnici ako symbolické pomocou inštrukcie **syms.**
2) Zapíšeme rovnice: **a*x^2+b*x+c = 0**
3) Riešime rovnice pomocou inštrukcie **solve**.
4) Urobíme skúšku správnosti dosadením do pôvodnej rovnice/rovníc.

Existujú dva spôsoby, ako možno symbolicky zapísať riešenie rovnice.

Príklad 1

Riešenia kvadratickej rovnice v tvare $ax^2 + bx + c = 0$ nájdeme nasledovne:

Ak pravá strana rovnice:

<table>
<tr>
<td>
1) je špecifikovaná:

```
syms x a b c
f = ax^2+b*x+c == 0
[x]=solve(f,x)
```

Výsledok:

```
>> x =
>>     -1/2*(b-(b^2-4*a*c)^(1/2))/a
       -1/2*(b+(b^2-4*a*c)^(1/2))/a
```

Dostali sme dve riešenia. Ak chceme použiť iba prvé, potom ho vyberieme nasledovne, napr.:

```
x1 = x(1)
```
</td>
<td>
2) nie je špecifikovaná.
implicitne sa predpokladá,
že je rovná nule:

```
syms x a b c
f = a*x^2 + b*x + c
[x]=solve(f,x)
```

Dostávame ten istý výsledok, ako v predchádzajúcom prípade.
</td>
</tr>
</table>

Podobne vyriešime kvadratickú rovnicu s dvoma premennými vzhľadom na premenné x a y:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

```
syms a b r x y
solve('(x-a)^2+(y-b)^2=r^2','x')
>>  ans =
      a+(b+r-y)^(1/2)*(r-b+y)^(1/2)
      a-(b+r-y)^(1/2)*(r-b+y)^(1/2)
```

Príklad 2

Riešenie rovnice $e^{2x} = 3y$ vzhľadom na x nájdeme nasledovne:

```
syms x y;
eq = exp(2*x) == 3*y
[x] = solve(eq, x)
```

kde názov premennej eq znamená skratku od equation (rovnica).

Príklad 3 Nájdite riešenie nasledovnej sústavy troch lineárnych rovníc o troch neznámych:

$$2x - 3y + 4z = 5$$

$$y + 4z + x = 10$$

$$-2z + 3x + 4y = 0$$

```
>> syms x y z;
>> eq1 = 2*x-3*y+4*z == 5
>> eq2 = y+4*z+x == 10
>> eq3 = -2*z+3*x+4*y % Pravá strana = 0, nie je nutné to písať
>> [x,y,z] = solve(eq1,eq2,eq3,x,y,z)
>> x=double(x), y=double(y), z=double(z)
```

Poznámka: pri zadávaní premenných nie je potrebné ich zadávať v abecednom poradí. Na druhej strane, **premenné vo výsledku sa nachádzajú v abecednom poradí** bez ohľadu na to, v akom poradí boli deklarované, resp. zadávané do rovníc, takže je potrebné dávať pozor na poradie premenných.

3 Pokračovanie riešenia príkladu

6) Pre riešenie v MATLABE **rovnice formálne prepíšeme** (dx1≈ dx1/dt, atď.)

```
x1 + R1*C1*dx1 - R1*C2*dx2 = U1
-R1*C1*dx1 + (R1+Rz)*C2*dx2 + x2 + Rz*x3 = 0
L*dx3 + R2*x3 - x1 - x2 = 0
```

Rovnice zapíšeme a riešime v symbolickom MATLABe

```
syms x1 x2 x3 dx1 dx2 dx3
syms R1 R2 Rz C1 C2 L U1
eq1 = x1+R1*C1*dx1-R1*C2*dx2 == U1       % zadanie rovníc
eq2 = -R1*C1*dx1+(R1+Rz)*C2*dx2+x2+Rz*x3
eq3 = L*dx3+Rz*x3-x1-x2
[dx1,dx2,dx3] = solve(eq1,eq2,eq3,dx1,dx2,dx3)
```

7) Výpis riešenia rovníc:

```
dx1 = -(R1*x1 - Rz*U1 - R1*U1 + R1*x2 + Rz*x1 + R1*Rz*x3)/(C1*R1*Rz)
dx2 = -(x1 - U1 + x2 + Rz*x3)/(C2*Rz)
dx3 = (x1 + x2 - Rz*x3)/L
pretty(dx1), pretty(dx2), pretty(dx3) % úprava výpisu
```

Výpis po pretty (upravené)

```
        R1 x1 - Rz U1 - R1 U1 + R1 x2 + Rz x1 + R1 Rz x3
dx1 = - --------------------------------------------------
                           C1 R1 Rz

       x1 - U1 + x2 + Rz x3
dx2= - ---------------------
             C2 Rz

      x1 + x2 - Rz x3
dx3 = -----------------
             L
```

8) **Prepis do maticového zápisu** stavového modelu:

forma: $\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} . u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1+R_z}{C_1R_1R_z} & -\dfrac{R_1}{C_1R_1R_z} & -\dfrac{R_1R_z}{C_1R_1R_z} \\ -\dfrac{1}{C_2R_z} & -\dfrac{1}{C_2R_z} & \dfrac{-R_z}{C_2R_z} \\ \dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_z}{L} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{R_z+R_1}{C_1R_1R_z} \\ \dfrac{1}{C_2R_z} \\ 0 \end{bmatrix} . u$$

Pozn. niektoré členy sa krátia, ale symbolický MATLAB to urobí automaticky.

Výstupná rovnica $u_{Rz} = -x_1 - x_2 + u_{Rz}$ v maticovom zápise je:

$$u_{Rz} = [-1 \quad -1 \quad 0] . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [1] . u_1$$

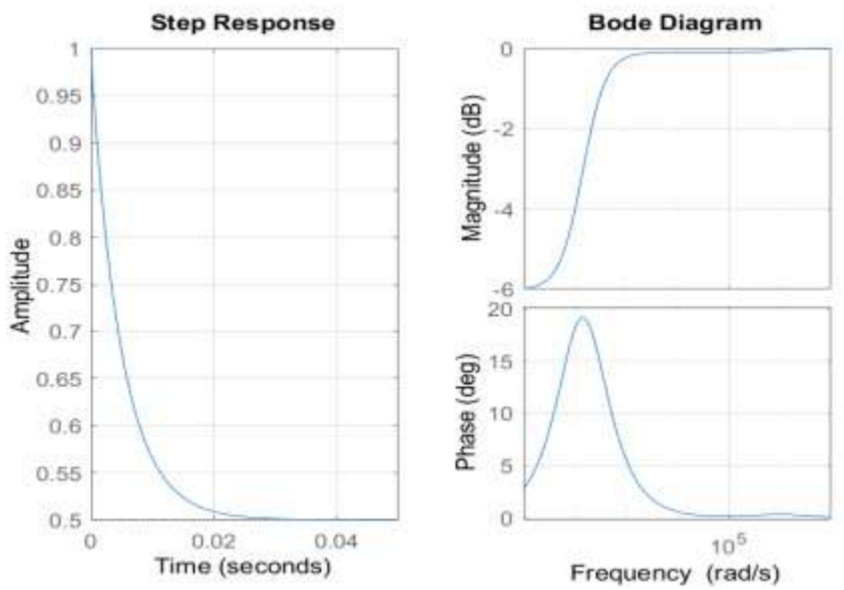
9) **Stavové rovnice zapíšeme do MATLABu** a dosadíme parametre

```
R1x=10; R2x=10000; Rzx=100; C1x=10e-6; C2x=100e-6; Lx=10e-3; U1x=1;
```

10) **Výpisy z MATLABu** (preformátované)

```
Stavový model v symbolickom tvare:
A =
[-(R1 + R2)/(C1*R1*Rz), -1/(C1*Rz), -1/C1]
[           -1/(C2*Rz), -1/(C2*Rz), -1/C2]
[                 1/L,        1/L, -Rz/L]
b = (R1 + Rz)/(C1*R1*Rz)
            1/(C2*Rz)
             0
cT = -1    -1     0
d =   1

Stavový model po dosaden9 parametrov:
A = -1001000       -1000     -100000
        -100        -100      -10000
         100         100      -10000
b =    11000
         100
           0
cT =     -1    -1     0
d =       1

Výpis stavového modelu:
a =                       x1           x2           x3
           x1 -1.00100e+06  -1000.00000 -1.00000e+05
           x2   -100.00000   -100.00000 -10000.00000
           x3    100.00000    100.00000 -10000.00000
b =                       u1
           x1  11000.00000
           x2    100.00000
           x3            0
c =                       x1           x2           x3
           y1     -1.00000     -1.00000            0
d =                      u1
           y1      1.00000

Výpis prenosovej funkcie:
F =
   5e-13 s^3 + 5e-07 s^2 + 0.004955 s + 0.5
  ------------------------------------------
  5e-13 s^3 + 5.055e-07 s^2 + 0.005061 s + 1

Vlastné hodnoty matice A:
ans =
   1.0e+06 *
  -1.000990006985654
  -0.009908342542973
  -0.000201650471373

Póly prenosovej funkcie:
ans =
   1.0e+06 *
  -1.000990006985655
  -0.009908342542973
  -0.000201650471373
```

11) **Zobrazenie prechodovej a frekvenčnej charakteristiky**:



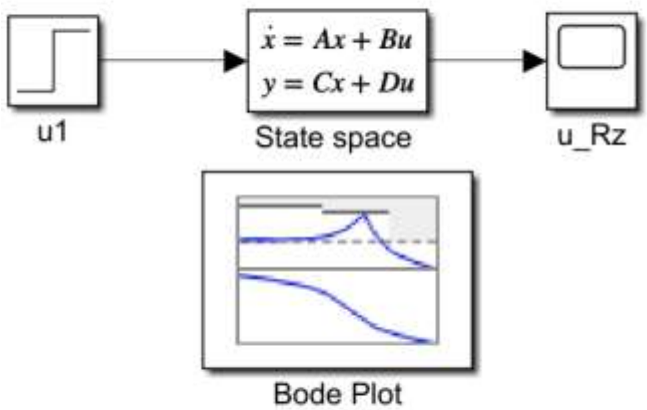
12) Výpis programu:

Názov programu **Sust3ARe_M.m** (sústave 3 lineárnych algebraických rovníc, MATLAB)

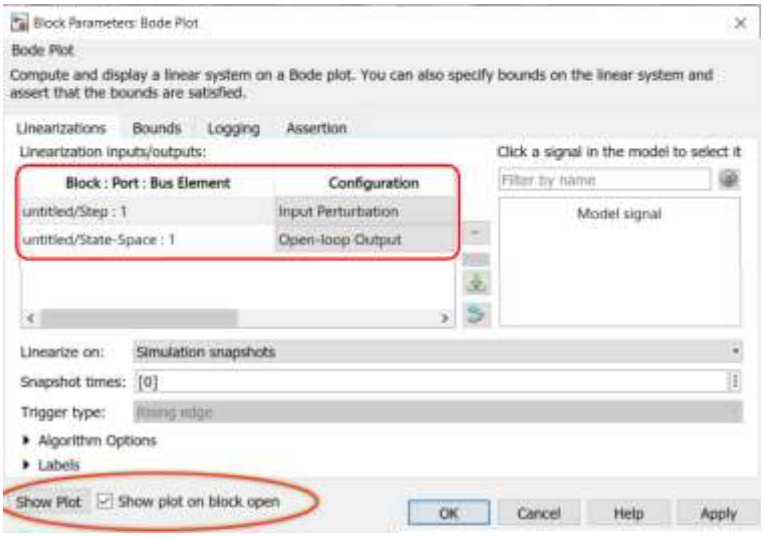
```
% Riešenie sústavy 3 lin.alg.rovníc v symb.MATLABe
% pre daný elektrický obvod
%
% x1 + R1.C1.dx1 - R1.C2.dx2 = U1
% -R1.C1.dx1 + (R1+Rz).C2.dx2 + x2 + Rz.x3 = 0
% L.dx3 + Rz.x3 - x1 - x2 = 0
%
% Neznámymi sú premenné dx1, dx2, dx3 predstavujúce derivácie
stavových veličín
% dx1=dx1/dt, dx2=dx2/dt, dx3=dx3/dt
clc, clear, format compact
syms x1 x2 x3 dx1 dx2 dx3;
syms R1 R2 Rz C1 C2 L U1
R1x=10; R2x=10000; Rzx=100; C1x=10e-6; C2x=100e-6; Lx=10e-3; U1x=1;
% parametre obvodu

% Zápis rovníc obvodu
eq1 = x1+R1*C1*dx1-R1*C2*dx2==U1       % zadanie rovníc
eq2 = -R1*C1*dx1+(R1+Rz)*C2*dx2+x2+Rz*x3
eq3 = L*dx3+Rz*x3-x1-x2
disp('Riešenie')
[dx1,dx2,dx3] = solve(eq1,eq2,eq3,dx1,dx2,dx3)
pretty(dx1), pretty(dx2), pretty(dx3) % úprava výpisu zlomkov

%% Stavový model (prepísaný z výsledkov riešenia alg. rovníc a
doplnený výstupnou rovnicou
disp('Stavový model v symbolickom tvare:')
A=[-(R1+R2)/(C1*R1*Rz) -R1/(C1*R1*Rz)  -R1*Rz/(C1*R1*Rz)
```

```
   -1/(C2*Rz)          -1/(C2*Rz)      -Rz/(C2*Rz)
    1/L                 1/L            -Rz/L]
b=[(Rz+R1)/(C1*R1*Rz);  1/(C2*Rz);      0]
cT=[-1 -1 0]
d=[1]

%% Náhrada symb.premenných hodnotami
R1=R1x; R2=R2x; Rz=Rzx; C1=C1x; C2=C2x; L=Lx; U1=U1x; %
disp('Stavový po dosadení hodnôt parametrov:')
A=[-(R1+R2)/(C1*R1*Rz) -R1/(C1*R1*Rz)  -R1*Rz/(C1*R1*Rz)
   -1/(C2*Rz)          -1/(C2*Rz)      -Rz/(C2*Rz)
    1/L                 1/L            -Rz/L]
b=[(Rz+R1)/(C1*R1*Rz);  1/(C2*Rz);      0]
cT=[-1 -1 0]
d=[1]

%% Výstupy
disp('Výpis stavového modelu:')
   printsys(A,b,cT,d)
disp('Výpis prenosovej funkcie:')
   [num,den]=ss2tf(A,b,cT,d);
   F=tf(num/den(end),den/den(end))
disp('Vlastné hodnoty matice A:')
   format long
   eig(A)
disp('Póly prenosovej funkcie:')
   roots(den)
   format short

subplot(1,2,1),step(A,b,cT,d),grid on
subplot(1,2,2),bode(A,b,cT,d),grid on

sim('Sust3ARe_S')
```

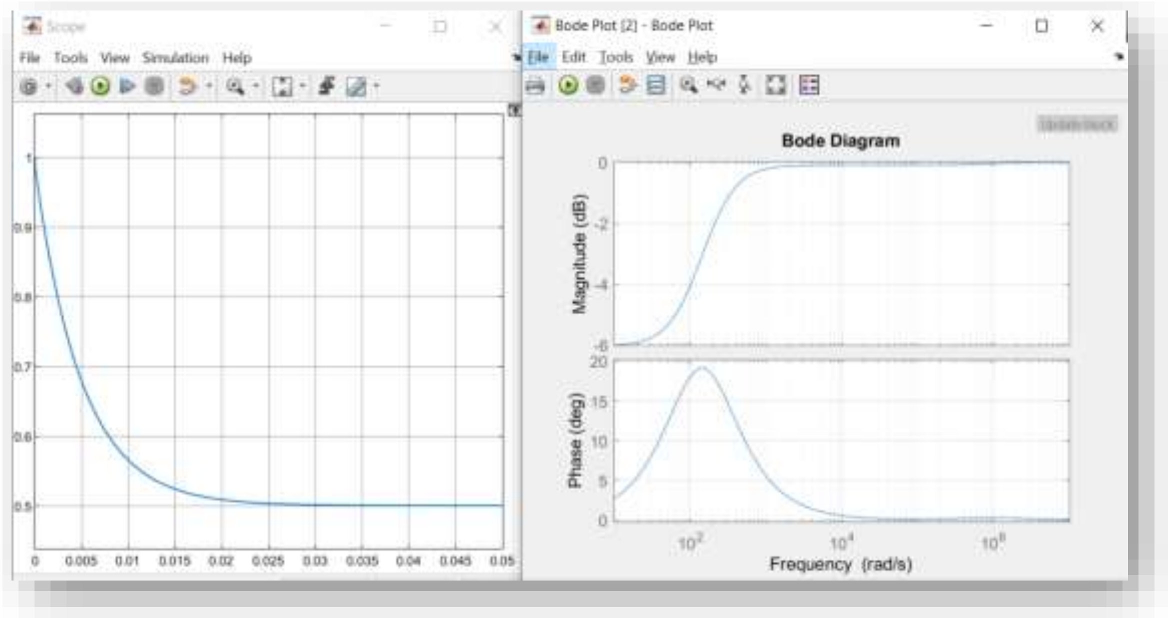
13) **Model v Simulinku** (**Sust3ARe_S.slx** = sústava 3. rádu, el.obvod, Simulink) doplnený blokom Bode Plot pre nakreslenie LFCh z blokovej schémy lineárneho obvodu v Simulinku.



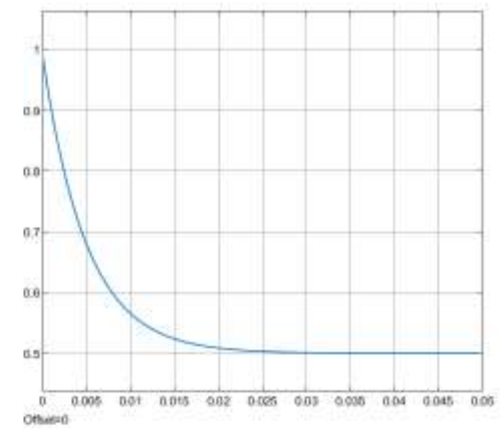
Nastavenie bloku Bode plot (treba zadefinovať vstup a výstup)

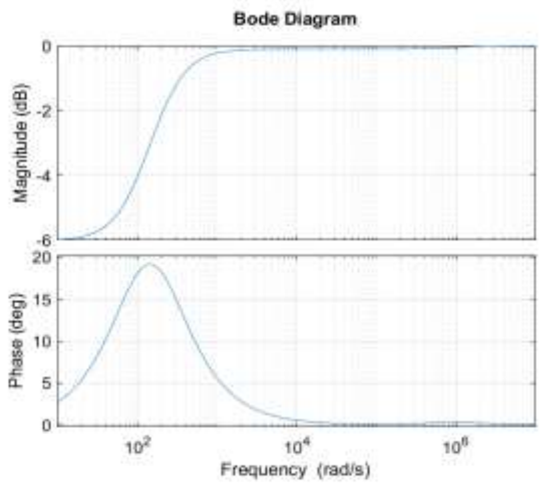


14) **Výstupy z blokov Scope a Bode Plot** na obrazovke



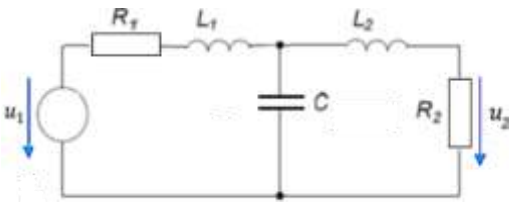
Výstupy iba grafov:





4 Príklad na precvičenie

Zostaviť stavový model nasledujúceho obvodu:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$